¡AJÁ!

Soluciones

Soluciones ingeniosas para 100 problemas en apariencia difíciles

Martin Erickson

b i b l i o t e c a
ESTÍMULOS **MATEMÁTICOS**

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

Real Sociedad Matemática Española

sm

Título original: *Aha! Solutions,*

The Matematical Association of America (Incorporated), 2009.

Dirección del proyecto: Adolfo Sillóniz

Diseño: Dirección de Arte Corporativa de SM

Edición: Fernando Barbero

Ilustración: Modesto Arregui

Corrección: Francisco Javier López

Traducción del inglés: Fernando Holgado Cortés

Revisión científica: Fernando Barbero y Emilio Fernández Moral

Responsable de la Real Sociedad Matemática Española de la Colección: María Moreno Warleta

ISBN: 978-84-675-6347-4

Depósito legal: M-20644-2013

Impreso en España / Printed in Spain

Imprime:

ÍNDICE

A Martin Gardner y Ross Honsberger,
cuya labor de difusión de las matemáticas inspiró a tantos.

Prefacio

A todos los matemáticos (principiantes, aficionados y profesionales) les emociona encontrar soluciones simples y elegantes a problemas aparentemente complicados. A ese tipo de soluciones se las denomina *soluciones* ¡Ajá!, una expresión que popularizó el matemático y divulgador Martin Gardner en sus libros ¡Ajá! *Paradojas que hacen pensar* y ¡Ajá! *Inspiración*. Las soluciones ¡Ajá! son sorprendentes, maravillosas y brillantes: revelan la belleza de las matemáticas.

Este libro es una colección de problemas con soluciones ¡Ajá! que me han hecho disfrutar y que espero que también disfrutes tú. Los problemas tienen un nivel de estudiante de grado universitario, pero deberían tener también interés para estudiantes de Secundaria, profesores de Matemáticas, aficionados a las mismas y cualquiera que se sienta atraído por los desafíos matemáticos.

Cuando comencé a estudiar matemáticas, me sirvieron de inspiración los trabajos de Martin Gardner y los del divulgador matemático Ross Honsberger (siguen haciéndolo). Una de las mejores maneras de atraer la atención de los jóvenes y hacer que se interesen por las matemáticas es "enganchándolos" con problemas irresistibles. Este método es muy adecuado, ya que un componente importante del estudio y de la investigación en matemáticas es la resolución de problemas. A veces la resolución de un problema requiere un nivel avanzado y otras es algo que descubrimos e introducimos en nuestra vida matemática diaria.

Para esta colección he seleccionado cien problemas repartidos entre aritmética, geometría, álgebra, cálculo, probabilidad y combinatoria. Algunos de los problemas han sido creados por mí y otros son más clásicos y merecen ser conocidos mejor. Los problemas empiezan siendo fáciles aunque se vuelven, por lo general, más complicados a medida que avanza el libro. Algunas soluciones requieren el uso de un ordenador. Una característica importante del libro es la discusión de conceptos matemáticos adicionales (Extras) relacionados con la solución de cada problema. Ese material está ahí para entretenerte, informarte o proponerte nuevos problemas. Si no recuerdas un concepto o definición matemática, hay una recopilación de conceptos matemáticos (Caja de herramientas) al final del libro que te será útil.

Me tomo muy en serio el mandamiento del poeta Horacio que decía que escribir debe deleitar e instruir, así que espero que te diviertas con estos problemas y que aprendas algo de matemáticas. Quizás tengas la satisfacción de descubrir alguna solución ¡Ajá! por ti mismo.

Quiero agradecer a las siguientes personas sus sugerencias para este libro: Robert Cacioppo, Robert Dobrow, Christine Erickson, Suren Fernando, Martin Gardner, David Garth, Joe Hemmeter, Ross Honsberger, Daniel Jordan, Ken Price, Khang Tran y Anthony Vazzana.

Capítulo 1
Problemas elementales

Vamos a comenzar con algunos problemas relativamente fáciles. El desafío se volverá gradualmente más difícil a medida que avances a lo largo del libro. Los problemas de este capítulo se pueden resolver sin utilizar matemáticas avanzadas. El conocimiento de aritmética básica, álgebra y geometría será de utilidad, así como tu propio pensamiento creativo.

Te recomiendo que intentes resolver todos los problemas, incluso si ya sabes la respuesta, porque puedes descubrir nuevos e interesantes aspectos de las soluciones. Después de cada solución encontrarás un apartado con material extra en el que se comenta algún resultado matemático relacionado con el problema. Recuerda, todos los problemas tienen una solución ¡Ajá!

1.1 Aritmética

Reparto justo

Ana tiene quince galletas y Berta tiene nueve. Carla, que no tiene ninguna galleta, paga a Ana y a Berta 24 céntimos por compartir sus galletas. Cada chica se come un tercio de las galletas. Berta dice que ella y Ana se deberían repartir los 24 céntimos a partes iguales, 12 para cada una. Ana dice que como ella ha aportado quince galletas y Berta solo nueve, ella debería quedarse quince céntimos y Berta nueve.

¿Cuál es la forma más justa de repartir los 24 céntimos entre Ana y Berta?

Solución

La clave del problema está en determinar el valor de una galleta. Cada chica se ha comido ocho galletas. Como Carla ha pagado 24 céntimos por ocho galletas, cada galleta se valora en 3 céntimos. Entonces Ana, que empieza con quince galletas y vende siete a Carla, debería recibir 21 céntimos, y Berta, que empieza con nueve galletas y vende una a Carla, debería recibir 3 céntimos.

EXTRA: REPARTO DE CAJAS DE GALLETAS

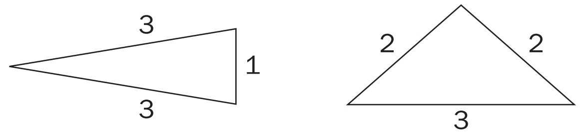
Ana, Berta y Carla tienen 21 cajas de galletas (todas del mismo tamaño). Siete están llenas, siete están por la mitad y siete están vacías; por el peso saben cuáles son. Las chicas quieren repartirse las cajas de tal forma que cada una se lleve el mismo número de cajas y la misma cantidad de galletas. ¿Cómo pueden lograrlo sin abrir ninguna de las cajas?

Hay dos formas diferentes, tal y como se muestra a continuación.

Ana	L	L	L	M	V	V	V	Ana	L	L	M	M	M	V	V
Berta	L	L	L	M	V	V	V	Berta	L	L	M	M	M	V	V
Carla	L	M	M	M	M	M	V	Carla	L	L	L	M	V	V	V

Hemos llamado L a las cajas llenas, M a las cajas que están por la mitad y V a las vacías. En ambas soluciones, cada chica se lleva siete cajas y una cantidad de galletas equivalente a tres cajas y media. No hemos contado como soluciones distintas las que se obtienen permutando los nombres de las chicas.

Como veremos más adelante (en Triángulos enteros, página 239), cada solución se corresponde con un triángulo de lados enteros y perímetro siete, como ves en la figura de debajo. La longitud de los lados del triángulo se corresponde con el número de cajas llenas que le toca a cada chica en el reparto.



Una simple fracción

A. Encuentra una fracción entera entre 1/4 y 1/3 tal que el denominador sea un entero positivo menor que 10.

B. Encuentra una fracción entera entre 7/10 y 5/7 tal que el denominador sea un entero positivo menor que 20.

Solución

A. Como $3 < 3\frac{1}{2} < 4$, tomando recíprocos, obtenemos las desigualdades

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$$

En efecto, multiplicando en cruz, tenemos que:

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{7} \text{ porque } 1 \cdot 7 < 4 \cdot 2$$

y

$$\frac{2}{7} < \frac{1}{3} \text{ porque } 2 \cdot 3 < 7 \cdot 1.$$

Puedes comprobar que 2/7 es la única solución probando todas las demás posibilidades.

B. Fíjate en que la fracción que aparece en el apartado anterior se puede obtener sumando los numeradores y los denominadores de 1/4 y 1/3.

$$\frac{1+1}{4+3} = \frac{2}{7}$$

¿Servirá el mismo truco para 7/10 y 5/7? Vamos a probar con la posible respuesta

$$\frac{7+5}{10+7} = \frac{12}{17}$$

Verificamos las desigualdades

$$\frac{7}{10} < \frac{12}{17} < \frac{5}{7}$$

multiplicando en cruz

$$\frac{7}{10} < \frac{12}{17} \text{ porque } 7 \cdot 17 < 10 \cdot 12$$

y

$$\frac{12}{15} < \frac{5}{7} \text{ porque } 12 \cdot 7 < 17 \cdot 5.$$

Puedes comprobar que 12/17 es la única solución probando todas las demás posibilidades.

EXTRA: FRACCIONES MEDIADORAS

Las respuestas dadas en **A**. y **B**. se denominan fracciones mediadoras o mediaciones[1]. La mediación de a/b y c/d es $(a + c)/(b + d)$. Por ejemplo, la mediación de 1/4 y 1/3 es 2/7 y la mediación de 7/10 y 5/7 es 12/17. Si $a/b < c/d$ (con b y d positivos), entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Comprueba estas desigualdades multiplicando los términos en cruz.

Aquí damos una demostración ¡Ajá! de las desigualdades que satisface la mediación. Si a, b, c y d son todos positivos, podemos interpretar las fracciones como concentraciones de sal en agua. Supongamos que tenemos dos disoluciones de agua salada, la primera con a cucharaditas de sal en b litros de agua, y la segunda con c cucharaditas de sal en d litros de agua.

La concentración de sal en la primera disolución es a/b cucharaditas/litro, mientras que la concentración de sal en la segunda es c/d cucharaditas/litro. Supón que la primera disolución está menos salada que la segunda, es decir, que $a/b < c/d$. Ahora, si combinamos

[1] Las fracciones mediadoras aparecen en el estudio de las sucesiones de Farey y en la "solución" de la paradoja de Simpson.

las dos disoluciones, obtenemos una disolución con $a + c$ cucharaditas de sal en $b + d$ litros de agua, por lo que ahora la salinidad es $(a + c)/(b + d)$ cucharaditas/litro. Evidentemente, la nueva disolución es más salada que la primera y menos que la segunda.

Es decir,

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

¡Hemos obtenido una demostración de lo más salada!

Una larga suma

¿Cuánto vale la suma de los cien primeros enteros,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100?$$

Por supuesto, podríamos sumar los números de uno en uno. Pero en vez de eso buscamos una solución ¡Ajá!, un cálculo simple que dé la respuesta inmediatamente y profundice en el problema.

Solución

Observa que los números se pueden emparejar de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} 1 & \text{y} & 100, \\ 2 & \text{y} & 99, \\ 3 & \text{y} & 98, \\ & \cdots & \\ 50 & \text{y} & 51. \end{array}$$

Tenemos 50 parejas y cada pareja suma 101, por lo que nuestra suma vale $50 \cdot 101 = 5050$.

Esta solución funciona en general para la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n,$$

donde n es un número par. Emparejamos los números como antes

$$\begin{array}{rcl} 1 & \text{y} & n, \\ 2 & \text{y} & n - 1, \\ 3 & \text{y} & n - 2, \\ & \cdots & \\ n/2 & \text{y} & n/2 + 1. \end{array}$$

Tenemos un total de $n/2$ parejas y cada una suma $n + 1$, por lo que nuestra suma vale $n/2 \cdot (n+1) = n(n+1)/2$.

¿Qué sucede si n es impar? No podemos emparejar los números como antes (el término central no tiene pareja). Sin embargo, añadiendo un 0 no se cambia el resultado final

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ahora tenemos un número par de términos, y pueden ser emparejados de la forma

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{y} & n, \\ 1 & \text{y} & n - 1, \\ 2 & \text{y} & n - 2, \\ & \cdots & \\ (n-1)/2 & \text{y} & (n-1)/2 + 1. \end{array}$$

Tenemos $(n + 1)/2$ parejas y cada una suma n por lo que nuestra suma vale, de nuevo, $n(n + 1)/2$.

Hay un "método de duplicación" que funciona tanto para n par como impar. Si S es el valor de la suma, introducimos un duplicado de S escribiendo los sumandos al revés

$$\begin{array}{lccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n. \\ S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1. \end{array}$$

Suma las dos expresiones de S, agrupando los primeros términos, después los segundos términos, y así sucesivamente

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1).$$

Como el término $n+1$ aparece n veces esta expresión se reduce a

$$2S = n(n + 1),$$

es decir,

$$S = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

EXTRA: LA SUMA DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Se dice que Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, resolvió nuestro problema para $n = 100$ en el colegio cuando tenía 10 años de edad. Sin embargo, según Eric Temple Bell [2], el problema que resolvió Gauss fue realmente más difícil. El problema era del siguiente tipo:

Calcula la siguiente suma: $81297 + 81495 + 81693 + \cdots + 100899$, donde la diferencia entre dos números es siempre la misma (en este caso 198) y se tiene que sumar un número determinado de términos (en este caso 100).

El problema mencionado por Bell consiste en realizar la *suma de una progresión aritmética.* Podemos calcular la suma usando nuestra fórmula para la suma de los n primeros enteros. El cálculo es:

$$\begin{aligned} 81297 + 81495 + 81693 + \cdots + 100899 &= 81297 \cdot 100 + 198 \cdot (1 + 2 + \cdots + 99) \\ &= 8129700 + 198 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \\ &= 9109800 \end{aligned}$$

Sumas de enteros consecutivos

Observa las identidades

$$\begin{gathered} 1 + 2 = 3 \\ 4 + 5 + 6 = 7 + 8 \\ 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 \\ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24 \\ 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35 \\ 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 \end{gathered}$$

¿Cuál es la relación que observas y por qué funciona?[2]

Solución

Considera la tercera identidad

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

Si sumamos 4 a cada uno de los tres números de la izquierda (9, 10 y 11), entonces obtenemos los tres números de la derecha (13, 14 y 15). Hemos sumado $4 \cdot 3 = 12$ al lado izquierdo de la igualdad, que es justo el valor del cuarto número que aparece a la izquierda.

La n-ésima identidad (para $n \geq 1$) es

$$n^2 + (n^2 + 1) + \ldots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \cdots + (n^2 + n + n).$$

[2] Roger B. Nelsen da una “demostración sin palabras” de este problema en el número de febrero de 1990 de *Mathematics Magazine.*

Hay $n + 1$ términos a la izquierda y n términos a la derecha. Si sumamos $n + 1$ a cada término de la izquierda excepto al último, obtenemos todos los términos de la derecha. Hemos sumado $(n + 1)\, n = n^2 + n$ a la izquierda, que es justo el valor del último término de la izquierda.

EXTRA: ENCONTRANDO UN POLINOMIO

Es fácil hallar la suma dada por la n-ésima identidad. La media de los $n + 1$ términos de la izquierda es $(n^2 + (n^2 + n))/2$, por lo que la suma vale

$$(n + 1)\frac{n^2 + (n^2 + n)}{2} = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{2}.$$

Supongamos que no conocemos esa fórmula, sino solamente las sumas:

$$3,\ 15,\ 42,\ 90,\ 165,\ 273,\ \ldots$$

¿Cómo podemos encontrar el polinomio $p(n)$ cuyos valores para $n = 1, 2, 3, \ldots$ sean esos números? El método (usando el cálculo de diferencias finitas) consiste en formar la sucesión de las diferencias de los valores consecutivos de nuestra sucesión inicial:

$$12,\ 27,\ 48,\ 75,\ 108,\ \ldots$$

Si repetimos este proceso, creamos una sucesión de sucesiones:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
3, & 15, & 42, & 90, & 165, & 273, & \ldots \\
12, & 27, & 48, & 75, & 108, & \ldots & \\
15, & 21, & 27, & 33, & \ldots & & \\
6, & 6, & 6, & \ldots & & &
\end{array}$$

Cuando obtenemos una sucesión constante, paramos. Ahora, el polinomio $p(n)$ se obtiene multiplicando los elementos de la primera columna de nuestra matriz por coeficientes binomiales sucesivos y sumando:

$$p(n) = 3 \cdot \binom{n}{0} + 12 \cdot \binom{n}{1} + 15 \cdot \binom{n}{2} + 6 \cdot \binom{n}{3} = \frac{(n+1)\,(n+2)\,(2n+3)}{2}$$

Este polinomio da los valores de nuestra sucesión empezando en $p(0)$. Como nosotros queremos empezar en $p(1)$, tenemos que reemplazar n por $n - 1$ en la fórmula para obtener el polinomio

$p(n) = n\,(n + 1)\,(2n + 1)/2.$

Sumas y restas

Calcula

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 2^2 - 1^2.$$

Solución

Usando la fórmula de la diferencia de cuadrados $x^2 - y^2 = (x + y)\,(x - y)$, la expresión se puede escribir de la forma

$$(100 + 99)(100 - 99) + (98 + 97)(98 - 97) + (96 + 95)(96 - 95) + \cdots + (2 + 1)(2 - 1).$$

Como cada segundo término de los paréntesis es igual a 1, esta expresión se simplifica para dar

$$100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + \cdots + 2 + 1.$$

En el problema "Una larga suma" vimos que esta suma valía 5050.

EXTRA: IDENTIDADES CURIOSAS[3]

¿Puedes explicar el patrón que siguen las identidades

$$\begin{gathered}
3^2 + 4^2 = 5^2 \\
10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 \\
21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2 \\
36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2?
\end{gathered}$$

Vamos a probar la última identidad de una manera que sugerirá cómo se demuestra el caso general. Llevando a la derecha de la igualdad todos los términos de la izquierda excepto el 36^2 se obtiene

$$36^2 = (41^2 - 40^2) + (42^2 - 39^2) + (43^2 - 38^2) + (44^2 - 37^2).$$

Fíjate en que hemos emparejado el mayor y el menor término, el segundo más grande con el segundo más pequeño, etc. Ahora, usando nuestra fórmula de la diferencia de cuadrados, tenemos

$$\begin{aligned}
36^2 &= (41 + 40)(41 - 40) + (42 + 39)(41 - 39) + \\
&\quad + (43 + 38)(43 - 38) + (44 + 37)(41 - 37) \\
&= 81 \cdot 1 + 81 \cdot 3 + 81 \cdot 5 + 81 \cdot 7 \\
&= 81\,(1 + 3 + 5 + 7) \\
&= 81 \cdot 16
\end{aligned}$$

[3] Michael Boardman da una "demostración sin palabras" de este problema en el número de febrero de 2000 de *Mathematics Magazine.*

Y efectivamente, $36^2 = 9^2 \cdot 4^2 = 81 \cdot 16$. Nuestro cálculo nos dice cómo funciona el caso general. Para $n \geq 1$ en la fila n afirmamos que se cumple

$$[n(2n+1)]^2 + \cdots + [2n(n+1)]^2 = (2n^2+2n+1)^2 + \cdots + (2n^2+3n)^2.$$

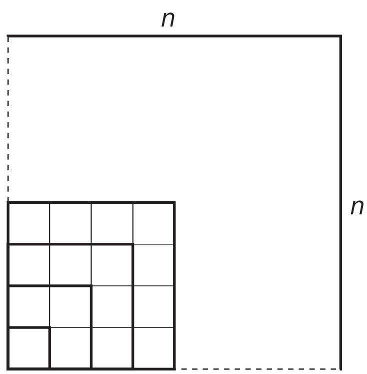
En efecto, cambiando términos de lado como hicimos en el caso particular anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}[n(2n+1)]^2 &= [(2n^2+2n+1)^2 - (2n\,(n+1))^2] + \cdots \\ &\quad + [(2n^2+3n)^2 - (n\,(2n+1)+1)^2] \\ &= (4n^2+4n+1)(1+3+5+7+\cdots+(2n-1))\end{aligned}$$

Necesitamos una fórmula para la suma de los n primeros números impares,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$$

Como se trata de la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética, podemos usar el método del problema “Una larga suma”. Sin embargo, utilizando el diagrama siguiente, podemos ver que la suma vale n^2.



Usando nuestra fórmula para la suma de los n primeros números impares, nuestra identidad se convierte en:

$$[n(2n+1)]^2 = (2n+1)^2\, n^2,$$

que, evidentemente, es cierta.

¿Cuál es mayor?

¿Qué número es mayor,

$$\sqrt{6} + \sqrt{10} \text{ o } \sqrt{5} + \sqrt{12}?$$

Podríamos calcular las raíces, pero buscamos una solución ¡Ajá! que nos dé la respuesta de manera inmediata.

Solución

La idea clave consiste en comparar los cuadrados de los dos números (eliminando así algunas de las raíces cuadradas). El mayor número tendrá el cuadrado mayor.

Los cuadrados de los números dados son

$$\left(\sqrt{6} + \sqrt{10}\right)^2 = 6 + 2\sqrt{60} + 10 = 16 + 2\sqrt{60}$$

y

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{12}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{60} + 12 = 17 + 2\sqrt{60}$$

El segundo cuadrado es mayor. Por lo tanto, $\sqrt{5} + \sqrt{12}$ es mayor que $\sqrt{6} + \sqrt{10}$.

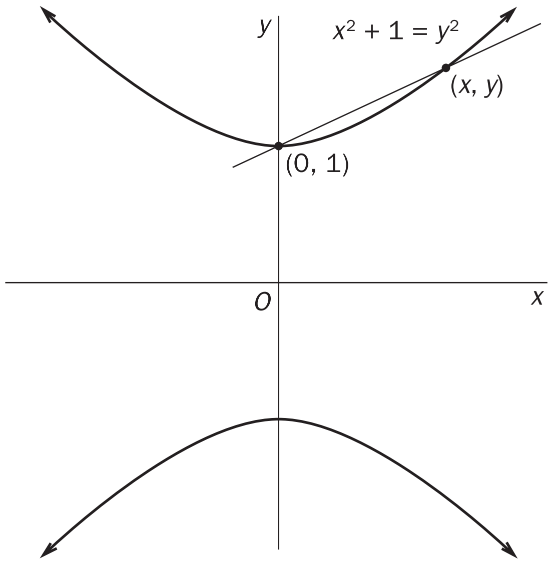
EXTRA: UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Los números de este problema —vamos a llamar al pequeño x y al mayor y— satisfacen la ecuación

$$x^2 + 1 = y^2.$$

Este es un ejemplo de *ecuación diofántica*, ecuaciones llamadas así en honor al matemático griego Diofanto (200 – 284). Diofanto buscaba soluciones racionales de dichas ecuaciones. Vamos a encontrar todas las soluciones racionales de la ecuación anterior.

La gráfica de la ecuación es una hipérbola, como se muestra en el dibujo.



El punto (0, 1) está en la hipérbola, por lo que ya tenemos una solución racional. Si (x, y) es otra solución racional (con $x \neq 0$), entonces la pendiente de la recta que pasa por (0, 1) y (x, y) es también racional. Vamos a llamar m a esa pendiente. Entonces

$$m = \frac{y - 1}{x - 0}.$$

Despejando y, obtenemos $y = mx + 1$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de la hipérbola queda

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= (mx + 1)^2 \\ &= m^2x^2 + 2mx + 1. \end{aligned}$$

Despejando x obtenemos

$$x = \frac{2m}{1 - m^2}$$

y, por tanto,

$$y = \frac{1 + m^2}{1 - m^2}.$$

Estas expresiones, cuando m es un número racional distinto de ±1, proporcionan una parametrización de todas las soluciones racionales de la ecuación excepto para la solución $(0, -1)$. Por ejemplo, si $m = 4/11$, entonces $(x, y) = (88/105, 137/105)$. La razón por la cual $(0, -1)$ no está incluida es porque determina una recta de pendiente no definida. El valor $m = 0$ corresponde a la recta tangente a la hipérbola en el punto (0, 1). ¿Puedes averiguar qué valores de m corresponden a la rama superior y cuáles a la rama inferior de la hipérbola?

Reducir el tamaño

Encuentra dos números enteros mayores que 1 cuyo producto sea 999 991.

Solución

Observa que

$$\begin{aligned} 999\,991 &= 1\,000\,000 - 9 \\ &= 1000^2 - 3^2. \end{aligned}$$

La regla algebraica para factorizar la diferencia de cuadrados nos viene bien ahora:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Aplicando esta regla con $x = 1000$ e $y = 3$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 999\,991 &= 1000^2 - 3^2 \\ &= (1000 - 3)\,(1000 + 3) \\ &= 997 \cdot 1003. \end{aligned}$$

EXTRA: BUSCANDO LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Hemos encontrado dos números, 997 y 1003, cuyo producto es 999 991. ¿Pueden esos factores descomponerse aún más (es decir, ¿tienen divisores propios?) o son números primos (busca en la Caja de herramientas que se encuentra al final del libro)? Podemos ir dividiendo 997 y 1003 por otros números, como 2, 3, etc., para comprobar si los cocientes son enteros, pero, ¿cuántos intentos tendríamos que hacer?

Cuando buscamos divisores propios de n solo necesitamos dividir n por números primos, porque si n tiene un divisor propio entonces ese divisor tiene a su vez un factor primo. A medida que vamos probando posibles divisores, 2, 3, 5, etc., los cocientes, $n/2$, $n/3$, $n/5$, etc., se van volviendo más pequeños. El "punto crítico" se alcanza con $\sqrt{n}$, ya que $n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$. Por lo tanto solo necesitamos buscar divisores primos menores que $\sqrt{n}$. Si no hay ningún divisor de este tipo, entonces n es un número primo.

Como $31 < \sqrt{997} < 32$, los únicos números primos que tenemos que comprobar como posibles divisores de 997 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 y 31. Después de dividir, comprobamos que ninguno de esos primos divide a 997 de manera exacta, por lo que 997 es un número primo. Para factorizar 1003, trabajamos con el mismo conjunto de primos, ya que $31 < \sqrt{1003} < 32$. Comprobando esos números, damos en el blanco con el 17 y encontramos que $1003 = 17 \cdot 59$, el producto de dos primos. Para verificar que 59 es un número primo, solo hace falta comprobar que 59 no es divisible por 2, 3, 5 ni 7, ya que $7 < \sqrt{59} < 8$.

Por tanto, la descomposición en factores primos de 999 991 es $17 \cdot 59 \cdot 997$.

Dígitos ordenados

¿Cuántos enteros positivos tienen la propiedad de que sus dígitos van creciendo según se leen de izquierda a derecha? Ejemplos: 19, 357 y 2589.

Solución

Cada subconjunto no vacío del conjunto de enteros {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} da forma a uno de esos números. Por ejemplo, el subconjunto {2, 5, 8, 9} forma el número 2589. Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos (incluyendo al conjunto vacío). En nuestro problema, $n = 9$ y excluimos al conjunto vacío, por lo que hay un total de $2^9 - 1 = 551$ números con esa propiedad.

EXTRA: DÍGITOS ORDENADOS EN UN CUADRADO

¿Cuántos cuadrados tienen la propiedad de que sus dígitos están en orden no decreciente cuando se leen de izquierda a derecha? Ejemplos: $12^2 = 144$, $13^2 = 169$ y $83^2 = 6889$.

Donald Knuth atacó este problema en 1985 en una de sus “Sesiones ¡Ajá!”, que eran clases en las que él y sus estudiantes se enfrentaban a desafíos matemáticos. Puedes encontrar vídeos de las sesiones en la página web del *Stanford Center for Professional Development* (<<http://scpd.stanford.edu/knuth>>).

Vamos a demostrar la existencia de una colección infinita de cuadrados perfectos cuyos dígitos están en orden. Esta colección fue encontrada por Anil Gangolli.

Demostraremos que

$$(\underbrace{6\ldots6}_{n}7)^2 = \underbrace{4\ldots4}_{n+1}\underbrace{8\ldots8}_{n}9, \quad n \geq 1.$$

Por ejemplo, para el caso $n = 1$ se tiene que $67^2 = 4489$.

Como

$$\underbrace{6\ldots6}_{n}7 = \frac{2}{3}10^{n+1} + \frac{1}{3},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}(\underbrace{6\ldots6}_{n}7)^2 &= \frac{4}{9}10^{2n+2} + \frac{4}{9}10^{n+1} + \frac{1}{9}\\ &= \underbrace{4\ldots4}_{2n+2} + \frac{4}{9} + \underbrace{4\ldots4}_{n+1} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}\\ &= \underbrace{4\ldots4}_{n+1}\underbrace{8\ldots8}_{n}9.\end{aligned}$$

Otra familia infinita similar es:

$$(\underbrace{3\ldots3}_{n}4)^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n+1}\underbrace{5\ldots5}_{n}6, \quad n \geq 1.$$

Hay muchas otras familias infinitas con la propiedad requerida.

¿Cuál es el siguiente término?

Calcula el siguiente término de cada una de las siguientes sucesiones:

(a) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ...

(b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

(c) 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 1, 5, ...

(d) 0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, ...

(e) 1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, ...

Solución

Para cada sucesión, intenta relacionar los números con un patrón que hayas visto antes.

(a) Los términos son los cuadrados perfectos, n^2. Por tanto, el siguiente término es $10^2 = 100$.

(b) Los términos forman la famosa sucesión de Fibonacci, $\{f_n\}$, definida por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para n ≥ 2. Por tanto, el siguiente término es 144.

(c) Los términos son los coeficientes del triángulo de Pascal (busca en la Caja de herramientas), leídos de izquierda a derecha y de arriba abajo. Por tanto, el siguiente término es 10.

(d) Los términos son los valores de $\pi(n)$, el número de primos menores o iguales que n. Por lo tanto, el siguiente término es $\pi(19) = 8$.

(e) Los términos son los números enteros más pequeños que tienen n divisores positivos. Por lo tanto, el siguiente término es el menor número con 13 divisores positivos. Este número es $2^{12} = 4096$.

EXTRA: LA ENCICLOPEDIA *ON-LINE* DE SUCESIONES DE ENTEROS

Un buen recurso para trabajar con sucesiones de enteros es *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, dirigida por Neil J. A. Sloane (la dirección *on-line* es <<http://oeis.org/>>). Simplemente escribe los primeros términos de la sucesión en la que estás interesado y el motor de búsqueda te enseñará las sucesiones con las que coincide. Por ejemplo, si introducimos los términos de la sucesión (e) de arriba,

$$1, 2, 4, 6, 16, 12, 24, 36, 48, 1024, 60,$$

entonces la búsqueda nos da la sucesión A005179 (el menor número con n divisores).